

## OBSERVADOR ADAPTABLE PARA TANQUES PRISMÁTICOS ABIERTOS

### Adaptive observer for open prismatic tanks

SA Rodríguez ✉, J De-León, J Barajas-Fernández, F Rivera-Trejo

(SAR) Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica. Instituto Politécnico Nacional. Av. de las Granjas 682 Col. Sta. Catarina Deleg. Azcapotzalco 02250, D.F., México. sarodriguezp@ipn.mx

(JBF)(FRT) División Académica de Ingeniería y Arquitectura. Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. Carr. Cunduacán - Jalpa de Méndez km. 1.5. 86690 Cunduacán, Tabasco, México.

(JDL) Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica. Universidad Autónoma de Nuevo León. Av. Universidad s/n. Ciudad Universitaria 66451 San Nicolás de los Garza, Nuevo León, México

**Nota científica** recibido: 14 de febrero de 2008, **aceptado:** 8 de febrero de 2010

**RESUMEN.** En este trabajo se presenta el diseño de un observador adaptable, esto es un sensor computacional, el cual será utilizado para estimar el caudal de entrada y algunos parámetros difíciles de medir en un tanque abierto, entre estos el coeficiente de descarga. Por medio de un sistema no lineal, se propone un modelo matemático para un tanque abierto. Además, se presentan condiciones suficientes para garantizar la convergencia de dicho observador. Resultados de simulación muestran las posibles aplicaciones en tanques de agua.

**Palabras clave:** Tanque abierto, sistema no lineal, observador adaptable, convergencia, coeficiente de descarga.

**ABSTRACT.** The design of an adaptive observer is presented in this paper. This is a computational sensor that will be used to estimate the inflow and several parameters that are difficult to measure in open tanks, such as the discharge coefficient. A mathematical model for an open tank is proposed by means of a nonlinear system. Furthermore, sufficient conditions are given to guarantee the convergence of the observer. Simulation results indicate possible applications in water tanks.

**Key words:** Open tank, nonlinear system, adaptive observer, convergence, discharge coefficient.

## INTRODUCCIÓN

La dinámica de un sistema se puede describir mediante el comportamiento dinámico de las variables de estado (Khalil H 2000. *Nonlinear systems*. Prentice Hall). En general, el control de sistemas dinámicos está basado en la suposición de que las variables de estado pueden ser medidas o que el vector de estado es conocido. Sin embargo, en la práctica solo una parte de las componentes de este vector son conocidas o son medidas directamente, debido a restricciones físicas o económicas. En este marco se plantea el problema de estimar o determinar las componentes del vector de estado por medio de un "sensor computacional" llamado observador o filtro.

Un observador se define como un sistema dinámico que tiene como entrada, la entrada del sistema original y la salida medible de este sistema. Mientras la salida del observador consiste de una

estimación de las componentes no medidas del sistema original.

En literatura existen varios trabajos clásicos sobre el diseño de observadores lineales (Luenberger DG 1966. *IEEE Trans.*, AC-11; Kalman RE, Falb PL, Arbib MA 1969. *Topics in Mathematical System Theory*. Mc Graw Hill). Por otra parte, los filtros que también son utilizados para este propósito, se han usado en diversas aplicaciones en ingeniería eléctrica (Rodríguez A, De León J, Femat R 2007. *Chaos Solutions & Fractals*, 32: 1345-1356; Besançon G, De-León J, Huerta O 2005. *Internal Report*. FIME-UANL, México; De-León J, Castro-Linares R, Huerta O 2005. *Proc.-Control Theory Appl*, 152(4): 465-476, july; Zhang Q 2002. *IEEE Trans on Automatic Control* 47(3): 525-529; Nijmeijer H, Mareels IMY 1997. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 44(10): 882-890). Sin embargo, no hay mucho

trabajo publicado en el área de sistemas hidráulicos utilizando estas herramientas computacionales.

En el modelado de la dinámica de un vaso de almacenamiento se han aplicado los observadores de Luenberger para estimar el caudal que entra a una presa y se ha mostrado que el sistema en lazo cerrado, resultante del esquema del observador propuesto, es finalmente acotado (uniformly ultimately bounded) (Soto G, Aguilar R, Rivera F 2003. Ingeniería Hidráulica en México, XVIII(3): 71-79). En Soto *et al.* (Soto G, Aguilar R, Rivera F 2003. Ingeniería Hidráulica en México, XVIII(3): 71-79) se propone reducir el error de estimación por medio de la selección de una ganancia "suficientemente grande en el observador". Recientemente, en el área de hidráulica (Rodríguez SA, Rivera F, Pacheco J 2008. En Hidrología de Embalses. IMTA-UJAT-UAM, México) proponen un observador no lineal para estimar el caudal que ingresa a un tanque, este observador reduce el error de estimación que persiste al utilizar un observador de Luenberger. Sin embargo, la utilización del observador requiere conocer la descarga del vaso o bien el coeficiente de descarga, los cuales se tienen que determinar mediante experimentación.

Los trabajos anteriores han resultado prometedores en la estimación de hidrogramas de ingreso a vasos y en la determinación de políticas de operación de presas en cascada (Vázquez E 2000. Universidad y Ciencia, 16(31): 5-9), lo que beneficia al Estado de Tabasco, puesto que la abundancia del agua es del orden del 28 % del total nacional (Velázquez G 1994. Ensayo Monográfico, Centro de Investigación de la DAIA, UJAT).

Por las razones anteriores y por la responsabilidad que tiene la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco para con la sociedad y su entorno, se ha motivado la investigación y la aplicación de los observadores en tanques abiertos de almacenamiento. De hecho la teoría que aquí se presenta, se puede aplicar a tanques prismáticos abiertos que contienen cualquier líquido, siempre que se verifiquen las hipótesis del resultado principal de este trabajo, teorema 1. En este artículo, por medio de un observador adaptable, se investiga la estimación del caudal de ingreso a un tanque abierto. Así como la determinación de algunos parámetros del tanque difíciles de

medir, entre estos el coeficiente de descarga (Miller RW 1996. Mc Graw Hill; Baker CR 2000. Cambridge University Press; Schimid WA, Lazos Martinez J 2004. Centro Nacional de Metrología; ISO VIM (DGUIDE 9999) 2005. International vocabulary of basic and general terms in metrology (VIM)). La estimación de estas variables permiten mejorar el control de estos sistemas de manera más eficiente y económica, ya que se reduce el número de sensores que interviene en el proceso.

El contenido de este trabajo está organizado como sigue. En la sección de Materiales y Métodos, se presenta el modelado matemático de un tanque abierto, así como el planteamiento del problema de estimación del caudal de ingreso al tanque. En la sección de Resultados y Discusiones, por medio del teorema 1 se muestra la estabilidad del sensor computacional propuesto. Se presentan también, un ejemplo de simulación sobre un tanque de almacenamiento en Matlab-Simulink, y comentarios finales y perspectivas de aplicación en presas.

## MATERIALES Y MÉTODOS

En esta sección se presenta el modelado matemático de la dinámica de un tanque abierto que contiene algún líquido, como se muestra en la Figura 1. Una vez establecido el modelo, se infieren los caudales de entrada y de salida, así como algunos parámetros que intervienen en la dinámica del tanque, a partir exclusivamente de la medición del nivel de líquido.

Primero considere un tanque abierto con volumen de líquido  $V$ , medido desde el orificio de salida del tanque en el tiempo  $t$  (ver Figura 1). El cambio del volumen en el tanque con respecto al tiempo, está dado por el principio de continuidad:

$$\dot{V} = Q_i - Q_o, \quad (1)$$

donde  $Q_i$  y  $Q_o$  son los caudales de entrada y salida, respectivamente. En Soto *et al.* (Soto G, Aguilar R, Rivera F 2003. Ingeniería Hidráulica en México, XVIII(3): 71-79) se aplica el principio de continuidad (1) en una presa, donde el caudal de entrada se define como

$$Q_i = \Theta(V, P), \quad (2)$$

donde la función  $\Theta(V, P)$  no es conocida, y además

es función del volumen del vaso y de los parámetros  $P$  del sistema.

En este trabajo se consideró una clase de tanques de tipo prismático, de modo que  $V$  y  $Q_o$  están expresados respectivamente por el volumen del prisma

$$V = A_s H, \quad (3)$$

y la Ley de Torricelli

$$Q_o = C_d A_o \sqrt{2gH}, \quad (4)$$

siendo  $A_s$  el área de la sección transversal, la cual es constante,  $H > 0$  es el nivel de líquido medido desde el orificio de salida del tanque en el tiempo  $t$ ,  $A_o$  es el área del orificio de salida,  $g$  es la gravedad,  $0 < C_d \leq 1$  es el coeficiente de descarga sin dimensiones y se supone constante. Entonces, las ecuaciones (1)-(4), permiten describir la dinámica de este sistema como:

$$\dot{H} = \frac{1}{A_s} Q_i - \frac{C_d A_o \sqrt{2g}}{A_s} \sqrt{H}. \quad (5)$$

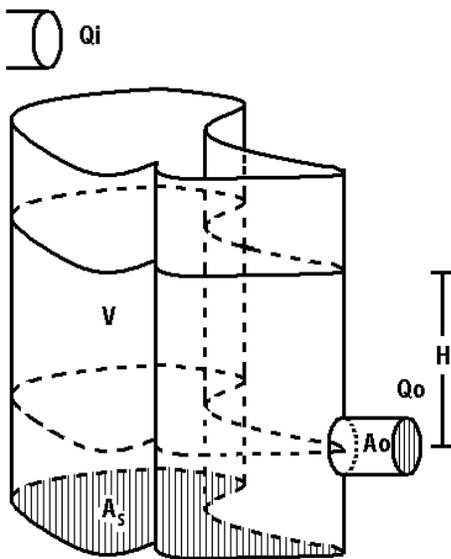


Figura 1. Tanque prismático.

Figure 1. Prismatic tank.

El comportamiento del sistema (5) puede ser determinado fácilmente, si el caudal de entrada  $Q_i$ , la altura  $H$  y el coeficiente de descarga  $C_d$  son conocidos. Por una parte, el caudal  $Q_i$  y la altura  $H$  pueden ser medidas mediante un medidor de flujo a partir del caudal másico y un limnógrafo (Miller

RW 1996. Mc Graw Hill; Baker CR 2000. Cambridge University Press), mientras que el coeficiente de descarga  $C_d$  (que se interpreta como un factor de corrección), se puede obtener mediante experimentación y calibración comparando con un patrón (Schimid WA, Lazos Martínez J 2004. Centro Nacional de Metrología). Sin embargo, este método para determinar la variable  $Q_i$ , y el parámetro  $C_d$ , tiene la desventaja de ser un proceso largo, tedioso y costoso. Esto se debe al costo del medidor de flujo que se requiere y al tiempo de experimentación en laboratorio que es necesario.

Para resolver el problema de costo en instrumentación, materiales y trabajo de campo, en este artículo de investigación, se propone estimar en línea el caudal de entrada  $Q_i$  y el coeficiente de descarga  $C_d$ , a partir de la sola medición de la altura del tanque  $H$ .

Para lograr este objetivo, se hace uso del enfoque de espacio de estado, por lo que se requiere lo siguiente:

**Suposición 1.** Sea

$$\theta := \frac{C_d A_o \sqrt{2g}}{A_s}, \quad (6)$$

constante y  $Q_i : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^+$  de clase  $C^{n-1}$  con  $dQ_i^{n-2}/dt^{n-2} = cte.$  para  $t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ , i.e. el gasto de entrada admite una representación finita en serie de Taylor.

Introduciendo las siguientes definiciones de variables,  $x_1 := H$ ,  $x_2 := Q_i$ ,  $x_3 := \frac{dQ_i}{dt}$ , ...,  $x_n := \frac{d^{n-2}Q_i}{dt^{n-2}}$ , las cuales representan las componentes del vector de estado del sistema,  $y := x_1 := H$  como variable de salida medible y  $\theta$  como un parámetro constante y desconocido a estimar. Entonces, se obtiene el siguiente sistema  $n$ -dimensional

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{A_s} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{y} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \theta, \quad (7)$$

$$y = (1 \ 0 \ \dots \ 0) x \quad (8)$$

donde  $x = (x_1 \ \dots \ x_n)^T$  es el vector de estado.

En Soto *et al.* (Soto G, Aguilar R, Rivera F 2003. Ingeniería Hidráulica en México, XVIII(3): 71-79) se utiliza un observador de Luenberger para estimar el caudal de entrada  $Q_i$  a partir del sistema (1)-(2), bajo el supuesto que el caudal de salida  $Q_o$  es conocido (medido). En Rodríguez *et al.* (Rodríguez SA, Rivera F, Pacheco J 2008. En Hidrología de Embalses. IMTA-UJAT-UAM, México) se propone un observador no lineal para estimar  $Q_i$  en (1) cuando el coeficiente de descarga  $C_d$  es conocido, i.e.  $Q_o$  esta disponible o bien el término  $C_d A_o \sqrt{2g}$  es determinado experimentalmente fuera de línea.

Ahora se establece lo siguiente:

**Problema 1.** Considere la dinámica de un tanque prismático abierto representado por el sistema (7)-(8). Se requiere estimar simultáneamente, a partir de la medición de la salida  $y := x_1 := H$ , el caudal de entrada  $Q_i$  y el parámetro  $\theta = \frac{C_d A_o \sqrt{2g}}{A_s}$ , el cual depende del coeficiente de descarga  $C_d$ .

**Nota 1.** Si  $\theta$  es conocido, entonces se puede encontrar el coeficiente de descarga  $C_d$ .

Por lo tanto, para resolver el problema planteado anteriormente, en la siguiente sección, se presenta el diseño de un observador adaptable, el cual estima en línea, el caudal de entrada  $Q_i$  y el coeficiente de descarga  $C_d$ . Este observador requiere solamente de la medición de la altura del tanque  $H$  para su implementación práctica. Este diseño resulta ser atractivo por sus ventajas económicas, ya que no necesita ni de un sensor para la descarga, ni de la realización de trabajos experimentales para determinar las variables antes mencionadas.

## RESULTADOS Y DISCUSIONES

Ahora, en esta sección se presenta el diseño de un observador adaptable para el sistema no lineal (7)-(8). Además, se presentan condiciones suficien-

tes para demostrar la convergencia hacia cero del error de estimación.

Con el fin de resolver el problema 1, el sistema (7)-(8) se reescribe en la siguiente forma compacta

$$\dot{x} = Ax + \psi(y)\theta, \quad x_0 = x(t_0), \quad (9)$$

$$y = Cx, \quad (10)$$

donde  $A$  es la matriz cuadrada de dimensión  $n \times n$  en la ec. (7),  $\psi(y) \in \mathbb{R}^n$  es el vector que multiplica a  $\theta$  por la izquierda en la ec. (7),  $C \in \mathbb{R}^n$  es el covector de la ec. (8) y  $x_0$  es la condición inicial del sistema (9)-(10).

Enseguida, se introduce un resultado sobre el diseño de observadores adaptables, que resuelve el problema 1, el cual es una variante del presentado en Rodríguez *et al.* (Rodríguez A, De León J, Femat R 2007. Chaos Solutions & Fractals, 32: 1345-1356), en este último se utiliza el observador adaptable para suprimir caos en sistemas de clase p.

Ahora, considere el diseño de un observador adaptable para sistemas afines con incertidumbre en los parámetros. El sistema (9)-(10), verifica que  $\psi(y)$  es continua,  $y$  es uniformemente acotada, y el parámetro  $\theta$  es desconocido, pero constante. Luego suponga lo siguiente para el diseño del observador (ver mas detalles en Besançon G, De-León J, Huerta O 2005. Internal Report. FIME-UANL, México):

**Suposición 2.** Existe una función  $K(t)$  tal que  $\dot{\eta} = (A - KC)\eta$  es exponencialmente estable.

**Suposición 3.** La solución  $\dot{\Lambda} = (A - KC)\Lambda + \psi(t)$  es de excitación persistente, en el sentido que existen  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  tales que

$$\alpha_1 I \leq \int_t^{t+\gamma_1} \Lambda(\tau)^T C^T P_\Lambda C \Lambda(\tau) d\tau \leq \beta_1 I \quad (11)$$

para una matriz acotada y definida positiva  $P_\Lambda$ , (Barnett S 1990. Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series).

**Suposición 4.** La función  $\Psi(t)$  es de excitación persistente en el sentido que existen  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  tales que

$$\alpha_2 I \leq \int_t^{t+\gamma_2} \Psi(\tau)^T C^T P_x C \Psi(\tau) d\tau \leq \beta_2 I \quad (12)$$

para todo  $t \geq t_0$ ,  $\Psi$  es la matriz de transición de  $\dot{x} = Ax$ ,  $y = Cx$  y  $P_x$  una matriz acotada y definida positiva.

Bajo las consideraciones anteriores, si la matriz  $K$  en la suposición 2, se selecciona como,  $K = S_x^{-1}C^T$ , donde  $S_x$  es solución de  $\dot{S}_x = -\rho S_x - A^T S_x - S_x A + C^T PC$ , entonces el siguiente observador estima el estado  $x$  y el parámetro  $\theta$ :

**Teorema 1.** Considere el sistema (9)-(10) y el observador adaptable:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + \psi(y)\hat{\theta} - (\Lambda S_\theta^{-1}\Lambda^T C^T + S_x^{-1}C^T) \\ &P(\hat{y} - y), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\dot{\hat{\theta}} := -S_\theta^{-1}\Lambda^T C^T P(\hat{y} - y) \quad (14)$$

$$\dot{\Lambda} = (A - S_x^{-1}C^T C)\Lambda + \psi(y) \quad (15)$$

$$\dot{S}_x = -\rho_x S_x - A^T S_x - S_x A + C^T PC \quad (16)$$

$$\dot{S}_\theta = -\rho_\theta S_\theta + \Lambda^T C^T PC\Lambda \quad (17)$$

$$y = C\hat{x} \quad (18)$$

donde  $S_x > 0$  y  $S_\theta > 0$ , y  $\rho_x, \rho_\theta$  son constantes positivas suficientemente grandes y  $P$  alguna matriz acotada y definida positiva. Entonces el sistema (13)-(18) es un observador adaptable para el sistema (9)-(10), donde el vector de error de estimación ( $e_x = \hat{x} - x, \epsilon_\theta = \hat{\theta} - \theta$ ) converge a cero exponencialmente a razón de  $\rho = \min(\rho_x, \rho_\theta)$ .

**Nota 2.** Si las suposiciones 3 y 4 son verificadas, entonces este hecho garantiza la invertibilidad de las matrices  $S_x, S_\theta$ , las cuales son simétricas y definidas positivas.

**Prueba.** Para mostrar la convergencia del error de estimación, considere lo siguiente. Sean los errores de estimación  $e_x := \hat{x} - x, \epsilon_\theta := \hat{\theta} - \theta$  del estado  $x$ , y del parámetro  $\theta$ , respectivamente. Considere ahora el sistema en el espacio de error:

$$\dot{e}_x := (A - \Lambda S_\theta^{-1}\Lambda^T C^T PC - S_x^{-1}C^T PC) e_x + \psi(y)\epsilon_\theta \quad (19)$$

$$\dot{\epsilon}_\theta := -S_\theta^{-1}\Lambda^T C^T PC e_x \quad (20)$$

Se sigue la idea de (Zhang Q 2002. IEEE Trans on Automatic Control 47(3): 525-529) y se define

$$\epsilon_x = e_x - \Lambda\epsilon_\theta \quad (21)$$

por lo que

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= (A - \Lambda S_\theta^{-1}\Lambda^T C^T PC - S_x^{-1}C^T PC) e_x + \\ &\psi(y)\epsilon_\theta - \Lambda\dot{\epsilon}_\theta - \dot{\Lambda}\epsilon_\theta \end{aligned} \quad (22)$$

Se reemplaza (20), (15) en (22)

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= (A - \Lambda S_\theta^{-1}\Lambda^T C^T PC - S_x^{-1}C^T PC) e_x + \\ &\psi(y)\epsilon_\theta + \Lambda S_\theta^{-1}\Lambda^T C^T PC e_x - \\ &(A - S_x^{-1}C^T C)\Lambda\epsilon_\theta - \psi(y)\epsilon_\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= (A - S_x^{-1}C^T PC) e_x - (A - S_x^{-1}C^T C)\Lambda\epsilon_\theta \\ &= (A - S_x^{-1}C^T PC) \epsilon_x \end{aligned} \quad (23)$$

y (21) en (20)

$$\dot{\epsilon}_\theta := -S_\theta^{-1}\Lambda^T C^T PC(\epsilon_x + \Lambda\epsilon_\theta)$$

$$\dot{\epsilon}_\theta := -S_\theta^{-1}\Lambda^T C^T PC\epsilon_x - S_\theta^{-1}\Lambda^T C^T PC\Lambda\epsilon_\theta \quad (24)$$

Ahora considere la función de Lyapunov

$$v(\epsilon_x, \epsilon_\theta) = \epsilon_x^T S_x \epsilon_x + \epsilon_\theta^T S_\theta \epsilon_\theta \quad (25)$$

y su derivada con respecto al tiempo

$$\begin{aligned} \dot{v}(\epsilon_x, \epsilon_\theta) &= \dot{\epsilon}_x^T S_x \epsilon_x + \epsilon_x^T \dot{S}_x \epsilon_x + \epsilon_x^T S_x \dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_\theta^T S_\theta \epsilon_\theta + \\ &\epsilon_\theta^T \dot{S}_\theta \epsilon_\theta + \epsilon_\theta^T S_\theta \dot{\epsilon}_\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{v}(\epsilon_x, \epsilon_\theta) &= \epsilon_x^T A^T S_x \epsilon_x - \epsilon_x^T C^T PC S_x^{-1} S_x \epsilon_x - \\ &\rho_x \epsilon_x^T S_x \epsilon_x - \epsilon_x^T A^T S_x \epsilon_x - \epsilon_x^T S_x A \epsilon_x + \\ &\epsilon_x^T C^T PC \epsilon_x + \epsilon_x^T S_x A \epsilon_x - \\ &\epsilon_x^T S_x S_x^{-1} C^T PC \epsilon_x - \\ &\epsilon_x^T C^T PC \Lambda S_\theta^{-1} S_\theta \epsilon_\theta - \\ &\epsilon_\theta^T \Lambda^T C^T PC \Lambda S_\theta^{-1} S_\theta \epsilon_\theta - \\ &\rho_\theta \epsilon_\theta^T S_\theta \epsilon_\theta + \epsilon_\theta^T \Lambda^T C^T PC \Lambda \epsilon_\theta - \\ &\epsilon_\theta^T S_\theta S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T PC \epsilon_x - \\ &\epsilon_\theta^T S_\theta S_\theta^{-1} \Lambda^T C^T PC \Lambda \epsilon_\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{v}(\epsilon_x, \epsilon_\theta) &= \epsilon_x^T (A^T S_x - C^T PC - \rho_x S_x - \\ &A^T S_x - S_x A + C^T PC + S_x A - \\ &C^T PC) \epsilon_x - \epsilon_x^T C^T PC \Lambda \epsilon_\theta + \epsilon_\theta^T \\ &(-\Lambda^T C^T PC \Lambda - \rho_\theta S_\theta + \Lambda^T C^T PC \Lambda - \\ &\Lambda^T C^T PC \Lambda) \epsilon_\theta - \epsilon_\theta^T \Lambda^T C^T PC \epsilon_x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{v}(\epsilon_x, \epsilon_\theta) &= \epsilon_x^T (-\rho_x S_x - C^T PC) \epsilon_x - \epsilon_x^T C^T PC \Lambda \epsilon_\theta + \\ &\epsilon_\theta^T (-\rho_\theta S_\theta - \Lambda^T C^T PC \Lambda) \epsilon_\theta - \\ &\epsilon_\theta^T \Lambda^T C^T PC \epsilon_x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{v}(\epsilon_x, \epsilon_\theta) &= -\rho_x \epsilon_x^T S_x \epsilon_x - \rho_\theta \epsilon_\theta^T S_\theta \epsilon_\theta - \epsilon_x^T C^T PC \epsilon_x - \\ &\epsilon_x^T C^T PC \Lambda \epsilon_\theta - \epsilon_\theta^T \Lambda^T C^T PC \epsilon_x - \\ &\epsilon_\theta^T \Lambda^T C^T PC \Lambda \epsilon_\theta, \end{aligned} \quad (26)$$

donde las expresiones (17), (23) y (24) fueron utilizadas. Ahora dado que

$$\begin{aligned}
 & -\epsilon_x^\top C^\top PC\epsilon_x - \epsilon_x^\top C^\top PC\Lambda\epsilon_\theta - \epsilon_\theta^\top \Lambda^\top C^\top PC\epsilon_x - \\
 & \quad \epsilon_\theta^\top \Lambda^\top C^\top PC\Lambda\epsilon_\theta = -(\epsilon_x^\top - \epsilon_\theta^\top \Lambda^\top)C^\top PC(e_x \\
 & \quad - \Lambda\epsilon_\theta) - (\epsilon_x^\top - \epsilon_\theta^\top \Lambda^\top)C^\top PC\Lambda\epsilon_\theta - \\
 & \quad \epsilon_\theta^\top \Lambda^\top C^\top PC(e_x - \Lambda\epsilon_\theta) - \epsilon_\theta^\top \Lambda^\top C^\top PC\Lambda\epsilon_\theta = \\
 & -e_x^\top C^\top PC\epsilon_x + e_x^\top C^\top PC\Lambda\epsilon_\theta + \epsilon_\theta^\top \Lambda^\top C^\top PC\epsilon_x - \\
 & \epsilon_\theta^\top \Lambda^\top C^\top PC\Lambda\epsilon_\theta - e_x^\top C^\top PC\Lambda\epsilon_\theta + \epsilon_\theta^\top \Lambda^\top C^\top PC\Lambda\epsilon_\theta \\
 & \quad - \epsilon_\theta^\top \Lambda^\top C^\top PC\epsilon_x + \epsilon_\theta^\top \Lambda^\top C^\top PC\Lambda\epsilon_\theta - \\
 & \quad \epsilon_\theta^\top \Lambda^\top C^\top PC\Lambda\epsilon_\theta = -e_x^\top C^\top PC\epsilon_x \\
 & \quad = -(\epsilon_x + \Lambda\epsilon_\theta)^\top C^\top PC(\epsilon_x + \Lambda\epsilon_\theta) \\
 & -\epsilon_x^\top C^\top PC\epsilon_x - \epsilon_x^\top C^\top PC\Lambda\epsilon_\theta - \epsilon_\theta^\top \Lambda^\top C^\top PC\epsilon_x - \\
 & \epsilon_\theta^\top \Lambda^\top C^\top PC\Lambda\epsilon_\theta = -(\epsilon_x + \Lambda\epsilon_\theta)^\top C^\top PC(\epsilon_x + \Lambda\epsilon_\theta) \\
 & \leq 0. \quad (27)
 \end{aligned}$$

Luego

$$\dot{v}(\epsilon_x, \epsilon_\theta) \leq -\rho_x \epsilon_x^\top S_x \epsilon_x - \rho_\theta \epsilon_\theta^\top S_\theta \epsilon_\theta \quad (28)$$

Si  $\rho = \min(\rho_x, \rho_\theta)$ , se tiene

$$\dot{v}(\epsilon_x, \epsilon_\theta) \leq -\rho v(\epsilon_x, \epsilon_\theta) \quad (29)$$

Finalmente, se termina la prueba cuando (29) implica que  $v(\epsilon_x(t), \epsilon_\theta(t)) \leq \exp(-\rho)v(\epsilon_x(0), \epsilon_\theta(0))$ , por lo que  $\epsilon_x$  y  $\epsilon_\theta$  convergen.

Enseguida se presenta un ejemplo de aplicación del observador (13)-(18) sobre un tanque cilíndrico. Para verificar el resultado obtenido con el observador adaptable, se discuten e interpretan los resultados mediante un esquema de simulación.

Considere un tanque de almacenamiento de agua, de forma cilíndrica con dimensiones comerciales:  $A_s = \pi(0,55)^2 m^2$ ,  $A_o = \pi\left(\frac{2,54 \times 10^{-2}}{2}\right)^2 m^2$ ,  $g = 9,81 m s^{-2}$ ,  $C_d = 0,9$ . Para este ejemplo, se considera que el régimen del fluido es laminar subcrítico, por lo que el efecto turbulento (número de Reynolds) no es considerado y la descarga se supone que esta dominada por los efectos inerciales y gravitatorios, por lo que se describe por (4).

Por otra parte, para el modelado matemático (7)-(8) se debe seleccionar  $n$ , lo cual depende de la complejidad de  $Q_i$ , de acuerdo a la Suposición (1).

Por simplicidad se propone  $Q_i$  descrito en la ecuación (30), por lo que es suficiente considerar  $n = 3$ , luego,

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{A_s} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \\
 & \begin{pmatrix} -\sqrt{y} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \theta, \theta \\
 &= \frac{C_d A_o \sqrt{2g}}{A_s}
 \end{aligned}$$

donde el parámetro a estimar propuesto es  $\theta = 2,1256 \times 10^{-3} m^{1/2} s^{-1}$ .

Se seleccionan las ganancias como  $P = 4$ ,  $\rho_x = 7$ ,  $\rho_\theta = 7$  y las condiciones iniciales  $\hat{\theta} = 0$ ,  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 2, 005, 0, 3)$ ,

$$S_x(0) = \begin{pmatrix} 0,25 & -0,6577 & 1,65 \\ -0,6577 & 3,46 & -12,975 \\ 1,65 & -12,975 & 64,88 \end{pmatrix}$$

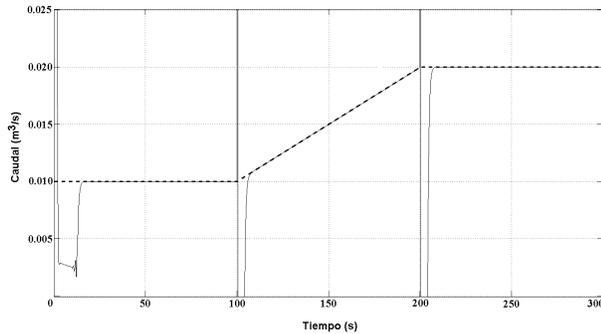
Así al aplicar el observador propuesto (13)-(18) se obtienen las simulaciones mostradas en la Figura 2.

En la Figura 2 se muestra el caudal de entrada en  $m^3 s^{-1}$  contra el tiempo así como su estimado, donde

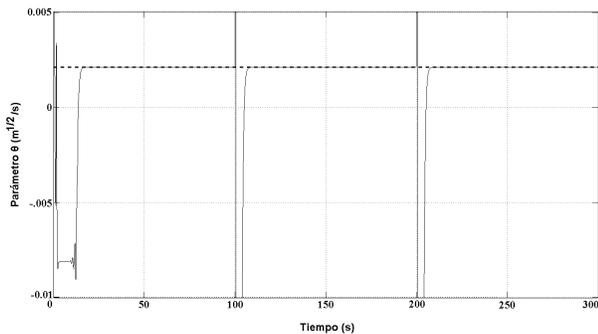
$$Q_i = \begin{cases} 0,01 & \text{si } 0[s] \leq t \leq 100[s], \\ 0,01t & \text{si } 100[s] \leq t \leq 200[s], \\ 0,02 & \text{si } 200[s] \leq t \leq 300[s]. \end{cases} \quad (30)$$

Por otra parte, en la Figura 3 se observa la constante  $\theta = 2,1256 \times 10^{-3} m^{1/2} s^{-1}$  junto con su estimado  $\hat{\theta}$ .

A partir de las Figuras 2 y 3 se observa que cerca de  $t = 0s$ , la estimación del caudal de entrada es mala, debido a la lejanía de las condiciones iniciales, pero después en  $t \approx 20s$  el error rápidamente tiende a cero, hasta  $t = 100s$  y  $t = 200s$ , donde la referencia no es diferenciable y causa un error de estimación, grande pero acotado y unos segundos después, rápidamente el estimado alcanza el valor de referencia.



**Figura 2.**  $Q_i$  en línea punteada y  $\hat{Q}_i$  en línea continua vs.  $t$ .  
**Figure 2.**  $Q_i$  in dashed line and  $\hat{Q}_i$  in continuous line vs.  $t$ .



**Figura 3.**  $\theta$  en línea punteada y  $\hat{\theta}$  en línea continua vs.  $t$ .  
**Figure 3.**  $\theta$  in dashed line and  $\hat{\theta}$  in continuous line vs.  $t$ .

Se remarca que extrapolar los resultados de este manuscrito de tanques a obras hidráulicas, como presas, no es evidente. Por la parte técnica, en este trabajo solo se consideran flujos en el régimen laminar subcrítico, los efectos viscosos asociados al número de Reynolds no fueron tomados en cuenta, sino solamente los efectos inerciales y gravitacionales asociados al número de Froude. Por otro lado, tomando en cuenta la parte normativa, cuando la obra de toma descargue directamente al río y el agua lleve un régimen subcrítico, es plausible aplicar la metodología presentada en este manuscrito para la clase de presas que cumplan las limitaciones del Apartado A y demás restricciones que aplican del

apartado 2.1.4 Obra de Toma, en las Normas Técnicas Complementarias para el Diseño y Ejecución de Obras e Instalaciones Hidráulicas (ver la publicación completa en la Gaceta Oficial del Distrito Federal el 6 de octubre de 2004):

A) Estructura de entrada.

Para presas con altura menor que 40 m, la velocidad del agua  $v$ , a través del vano de las compuertas en estructuras de entrada, no debe ser mayor que el valor dado en la siguiente expresión, pero limitada a un rango de  $1.5$  a  $3 \text{ m s}^{-1}$ :

$$v = 0,12\sqrt{2gH}.$$

Finalmente, se concluye que con la intención de obtener el caudal de entrada y algunos parámetros difíciles de medir en un tanque abierto, se estimaron estas cantidades, mediante un observador adaptable. La estabilidad del modelado del tanque y del observador adaptable en lazo cerrado fue analizada y verificada mediante simulación en MATLAB-SIMULINK. Al ser estable el sistema en lazo cerrado, el error de estimación converge a cero cuando el tiempo tiende a infinito. En este trabajo, a diferencia de Soto *et al.* (Soto G, Aguilar R, Rivera F 2003. Ingeniería Hidráulica en México, XVIII(3): 71-79) y Rodríguez *et al.* (Rodríguez SA, Rivera F, Pacheco J 2008. En Hidrología de Embalses. IMTA-UJAT-UAM, México), para la estimación del caudal de entrada solo se requirió la medición  $H(t)$ , del nivel del tanque y no de su gasto de salida.

Se ejemplificaron los resultados de estabilidad de este trabajo, por medio de la simulación en un tanque con dimensiones comerciales. Aquí se estimó el caudal de entrada y el parámetro  $\theta$  que depende del coeficiente de descarga del tanque.

Como trabajo a futuro se propone extender el presente análisis a una clase de vasos de almacenamiento irregulares, como por ejemplo presas pequeñas.