

Ecuaciones locales altura-diámetro no lineales para cinco coníferas en el suroeste de Puebla, México

Nonlinear local height-diameter equations for five conifers in southwestern Puebla, Mexico

Juan Carlos Tamarit-Urias^{1*} , Jonathan Hernández-Ramos² , Vidal Guerra-De la Cruz³ ,
Enrique Buendía-Rodríguez⁴ , Casimiro Ordóñez-Prado¹ 

¹Instituto Nacional de Investigaciones Forestales, Agrícolas y Pecuarias, Centro de Investigación Regional Golfo Centro, Campo Experimental San Martinito. Carretera Federal México - Puebla km 56.5, CP 74100, San Martinito, Tlahuapan, Puebla, México.

²Instituto Nacional de Investigaciones Forestales, Agrícolas y Pecuarias, Centro de Investigación Regional Centro, Campo Experimental Bajío. Carretera Celaya - San Miguel de Allende km 6.5, CP 38010 Celaya, Guanajuato, México.

³Instituto Nacional de Investigaciones Forestales, Agrícolas y Pecuarias, Centro de Investigación Regional Centro, Sitio Experimental Tlaxcala. Carretera Tlaxcala - Santa Ana Chiautempan km 2.5, CP 90800 Colonia Industrial, Santa Ana Chiautempan, Tlaxcala, México.

⁴Instituto Nacional de Investigaciones Forestales, Agrícolas y Pecuarias, Centro de Investigación Regional Centro, Campo Experimental Valle de México. Carretera Los Reyes - Texcoco km 13.5, CP 56250, Coatlinchán, Texcoco, Edo. de México.

Autor de correspondencia: tamarit.juan@inifap.gob.mx

Artículo científico

Recibido: 05 de mayo 2025

Aceptado: 05 de septiembre 2025

RESUMEN. La altura total (At) del árbol es una variable relevante para predecir otros atributos del árbol o del rodal como el volumen, biomasa o contenido de carbono. Sin embargo, a diferencia del diámetro normal (Dn), la medición de la altura total es difícil y costosa, por lo que para estimarla se recurren a ecuaciones At - Dn. El objetivo fue generar ecuaciones locales altura - diámetro para cinco especies de coníferas con importancia maderable al suroeste de Puebla, México. En una primera fase se evaluó la capacidad predictiva de nueve modelos biparamétricos no lineales, se utilizó una base de datos global integrada en el 2012 de las cinco especies. Mediante un sistema de evaluación cuantitativo y gráfico se identificó al modelo de Hossfeld I modificado como el de mejor capacidad predictiva porque exhibió un comportamiento biológicamente realista. En una segunda fase el modelo seleccionado se ajustó mediante tres estrategias de ajuste: (1) mínimos cuadrados ordinarios no lineales (MCO-NL) por especie, (2) MCO-NL con incorporación de variables indicadoras (VI) para la base global y, (3) modelos de efectos mixtos (MEM) para la base completa y usando la covariable especie como factor de agrupación. Los estadísticos R^2_{adj} y RCME fueron mejores en MCO-NL-VI y MEM que en MCO-NL, posteriormente se diagnosticó que MEM fue superior que MCO-NL-VI (AIC = 10 442.2, BIC = 10481.24 y logLik = -5 214.1). Se concluye que los valores de los efectos aleatorios del MEM son útiles para estimar la At con uso principal en inventarios forestales maderables.

Palabras clave: Agrupación por especie, coeficientes aleatorios, modelo de efectos mixtos, parámetros específicos por taxón, variables indicadoras.

ABSTRACT. Tree height (h) is a relevant variable for predicting other tree or stand attributes such as volume, biomass or carbon content. However, unlike diameter at breast height (d), the measurement of total height is difficult and costly, so h - d equations are used to estimate it. The objective was to generate local height - diameter equations for five conifer species of timber importance in southwestern Puebla, Mexico. In a first phase, the predictive capacity of nine nonlinear biparametric models was evaluated, using the global database integrated in 2012 of the five species. Through a quantitative and graphic evaluation system, the modified Hossfeld I model was identified as the one with the best predictive capacity because it exhibited a biologically realistic behavior. In a second phase, the selected model was adjusted using three fitting strategies: (1) nonlinear least squares (NLS) per species, (2) NLS with the incorporation of dummy variables (NLS-DV) for the global database, and (3) mixed-effects models (MEM) for the full base and using the species covariate as a grouping factor. According to R^2_{adj} and RMSE statistics it was determined that NLS-DV and MEM were better than NLS, subsequently MEM was diagnosed to be superior than NLS-DV (AIC = 10 442.2, BIC = 10481.24 and logLik = -5 214.1). It is concluded that MEM random effects values are useful for estimating h with primary use in forest inventories.

Keywords: Grouping by species, random coefficients, mixed-effects model, taxon-specific parameters, dummy variables.

Como citar: Tamarit-Urias JC, Hernández-Ramos J, Guerra-De la Cruz V, Buendía-Rodríguez E, Ordóñez-Prado C (2025) Ecuaciones locales altura-diámetro no lineales para cinco coníferas en el suroeste de Puebla, México. Ecosistemas y Recursos Agropecuarios. 12(3): e4610, 2025. DOI: 10.19136/era.a12n3.4610.

INTRODUCCIÓN

La medición de la altura total (At) y el diámetro normal (Dn) del árbol son variables dendrométricas esenciales para conocer sus dimensiones, en función de que de tales atributos se pueden estimar otros parámetros, tanto del árbol como del rodal (Zang *et al.* 2016, Xie *et al.* 2022). Sin embargo, la medición precisa de la altura es un proceso complejo, lento y costoso (MacPhee *et al.* 2018, Ciceu *et al.* 2020). En contraparte, el diámetro normal es sencillo, preciso y económico de medir (Corral *et al.* 2019, Ogana *et al.* 2020). Debido a que entre la At y el Dn existe una fuerte correlación, es posible construir ecuaciones At - Dn para predecir la altura total (Uzoh 2017, West y Strimbu, 2025); por ello, para realizar inventarios forestales maderables, es una práctica común que en los sitios de muestreo solo se mida la altura de una fracción de los árboles (Lam *et al.* 2017, Hoiço *et al.* 2020). Posteriormente, se usan funciones altura - diámetro específicas por taxón y ecorregión para predecir la altura a partir del diámetro normal, con esta estrategia se reduce el costo para coleccionar la información en campo y por tanto del inventario (Imani *et al.* 2017, Ferraz-Filho *et al.* 2018). A este tipo de modelos At - Dn se les denomina locales (básicos o simples) porque solamente usan el Dn como variable predictora (Salas-Eljatib *et al.* 2019, Chenge 2021).

Los modelos altura - diámetro por especie y zona ecológica son necesarios para: realizar estimaciones del volumen por árbol en inventarios maderables, determinar la altura dominante y el índice de sitio para determinar la productividad y, describir la estructura vertical de la masa forestal en el tiempo (Duan *et al.* 2018, Gollob *et al.* 2018, Han *et al.* 2021, Yang *et al.* 2022). Estos modelos también son útiles porque pueden ser parte de sistemas de crecimiento y rendimiento maderable, para evaluar diferentes etapas sucesionales, para cuantificar carbono y CO₂, entre otros atributos de la masa forestal (Bui *et al.* 2023, Song y Zeng 2024, Ismail *et al.* 2025).

Para la construcción de ecuaciones At - Dn, en otros países se han aplicado y comparado diferentes enfoques y técnicas para ajustar modelos alométricos y de crecimiento (Magalhães 2017, MacPhee *et al.* 2018, Lin *et al.* 2022, Seki y Sakici 2022); entre estas, destacan el uso de mínimos cuadrados ordinarios no lineales (MCO-NL), la aplicación de variables indicadoras (VI) y modelos de efectos mixtos (MEM). Sin embargo, en México no se ha realizado estudios que contrasten tales estrategias de ajuste orientados a identificar al método más efectivo.

Cuando se aplican MEM, se define algún factor de agrupación que contenga diferentes niveles (Harrison *et al.* 2018, Mehtätalo y Lappi 2020), comúnmente el factor de agrupación ha sido la parcela o el rodal (Uzoh 2017, Bronisz y Mehtätalo 2020, Hoiço *et al.* 2020, Lin *et al.* 2022, Hobiger *et al.* 2025). Sin embargo, Vibrans *et al.* (2015), Chenge (2021) y Bui *et al.* (2023), refieren que se deben identificar, construir y explorar de manera inteligente otros factores de agrupación que pueden ser covariables lógicas. Ejemplos de estos factores pueden ser atributos de los propios árboles como la categoría diamétrica, clase de altura, densidad de árboles, tipo de copa o la especie.

El factor de agrupación también puede ser algún parámetro del rodal como el índice de sitio, estructura, área basal, edad o el tipo de bosque; o bien, alguno inherente a variables de clima (precipitación, temperatura), tipo de suelo, fisiografía (altitud, exposición, pendiente), de manejo silvícola (intensidad de aclareos, fertilización, control de plagas) o la ubicación geográfica (ecorregión, país) (Cysneiros *et al.* 2020, Cui *et al.* 2022). En particular y en coincidencia con Zang *et*

al. (2016) y Nigul *et al.* (2021), en México el uso de la especie como factor de agrupación ha sido poco explorada en la generación de ecuaciones At - Dn. Además, para las principales especies maderables de coníferas con importancia económica, ambiental y social que crecen en la Unidad de Manejo Forestal 2101 “Izta-Popo” de Puebla, México, no se han generado ecuaciones locales altura – diámetro.

Del contexto expuesto, es evidente un vacío de conocimiento, así como la necesidad e importancia de realizar estudios orientados a la generación de modelos locales At - Dn específicos por taxón y ecoregión. Para superar estas limitaciones se planteó la hipótesis de que es posible construir un conjunto de herramientas biométricas cuantitativas conformado por modelos At - Dn que contribuyan a la aplicación de mejores prácticas de manejo forestal, esto mediante la evaluación de la capacidad predictiva de funciones no lineales y la comparación de tres estrategias de ajuste: (1) la técnica de mínimos cuadrados ordinarios no lineales (MCO-NL), (2) MCO-NL con la incorporación de variables indicadoras (MCO-NL-VI) y, (3) el enfoque de modelo de efectos mixtos (MEM). El objetivo fue generar ecuaciones locales altura – diámetro para cinco especies maderables del grupo de las coníferas en la Umafor 2101 al suroeste de Puebla, México.

MATERIALES Y MÉTODOS

Área de estudio

La zona de estudio fue la Unidad de Manejo Forestal (Umafor) 2101 que comprende la región “Izta-Popo” al suroeste de Puebla, México, se localiza entre los 18.45° y 19.50° N y los 97.60° y 98.75° O. Pertenece a la provincia fisiográfica X Eje Neovolcánico y a la parte alta de la región hidrológica 18 Río Balsas. La vegetación arbórea corresponde a bosques de pino, oyamel, pino-encino y encino en un rango altitudinal de 1 800 a 2 900 m, se manejan con el método mexicano de ordenación de bosques irregulares y con el método de desarrollo silvícola (CONAFOR 2016). El clima es templado subhúmedo C(w2), temperatura media anual de 12 a 18 °C, temperatura del mes más frío de -3 °C y del más caliente de 22 °C; lluvias en verano con un índice P/T mayor de 55. Los principales suelos son de tipo Regosol, Cambisol y Feozem (CONAFOR, 2015).

Bases de datos procesada

En un esfuerzo coordinado entre la Comisión Nacional Forestal (CONAFOR) Delegación Puebla y el Gobierno del estado de Puebla, en 2012 en la Umafor 2101 se estableció una red de 51 sitios permanentes de investigación silvícola (SPIS). Cada SPIS se ubicó considerando las características ecológicas en que se distribuyen las especies forestales más abundantes y con importancia económica. Los SPIS se establecieron en una cronosecuencia para tener la representación en el tiempo de todas las etapas de crecimiento de los rodales, en términos de clases de diámetro y altura. Cada sitio fue cuadrado de 50 m × 50 m, con una parcela central de 30 m × 30 m, con una franja perimetral de protección de 10 m. A los árboles en la parcela central se les determinó la especie, se les midió con cinta diamétrica de 5 m marca Forestry Suppliers el diámetro normal (Dn, cm) a 1.3 m desde el nivel del suelo, solo se midieron árboles a partir de la categoría diamétrica de 7.5 cm; con un clinómetro Suunto® se les midió la altura total (At, m). La CONAFOR-Puebla dispuso el acceso a los datos de Dn y At, se integró una base de datos global y bases separadas para las

especies de mayor abundancia e importancia maderable (*Pinus hartwegii* Lindl, *Pinus montezumae* Lamb., *Pinus pseudostrobus* Lindl., *Abies religiosa* (Kunth) Schltdl. et. Cham. y *Cupressus lindleyi* Klotz, ex Endl.), cuyas estadísticas descriptivas se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1. Valores de las estadísticas descriptivas básicas de las variables diámetro normal y altura total de las cinco especies de coníferas analizadas en Puebla, México.

Especie	Variable	Observaciones	Mínimo	Máximo	Media	DE	CV (%)
<i>Pinus hartwegii</i>	Dn (cm)	479	6.30	64.80	20.75	14.17	68.29
	At (m)	479	3.10	33.25	12.39	7.72	62.35
<i>Pinus montezumae</i>	Dn (cm)	483	6.50	80.00	28.42	16.06	56.50
	At (m)	483	2.72	41.00	18.75	10.54	56.20
<i>Pinus pseudostrobus</i>	Dn (cm)	284	9.20	108.00	34.49	16.36	47.44
	At (m)	284	7.15	42.20	23.47	8.03	34.23
<i>Abies religiosa</i>	Dn (cm)	625	7.30	115.90	26.60	20.01	75.23
	At (m)	625	3.25	51.00	19.84	9.77	49.26
<i>Cupressus lindleyi</i>	Dn (cm)	84	7.40	147.50	31.49	28.99	92.06
	At (m)	84	5.70	41.40	19.86	9.02	45.43
Base global	Dn (cm)	1955	6.30	147.5	26.97	18.28	67.78
	At (m)	1955	2.72	51.00	18.27	9.93	54.36

Dn = diámetro normal; At = altura total; DE = desviación estándar; CV = coeficiente de variación.

Modelos alométricos y de crecimiento candidatos evaluados

Con base en un análisis previo que consistió en ajustar diferentes modelos alométricos y de crecimiento reportados en la literatura especializada (Abedi y Abedi 2021, Lebedev y Kuzmichev 2020, Cui *et al.* 2022 y Zhang *et al.* 2023), se realizó una preselección de nueve modelos biparamétricos no lineales (Tabla 2), en coincidencia con Sharma y Breidenbach (2015) y Han *et al.* (2021), estos modelos representaron de mejor manera la relación At - Dn observada con un comportamiento gráfico biológicamente realista. Esos nueve modelos se perfilaron como candidatos plausibles para modelar el crecimiento de la At en función del Dn.

Tabla 2. Modelos alométricos y de crecimiento ajustados y evaluados para generar ecuaciones locales altura – diámetro para cinco taxones de coníferas en la zona suroeste de Puebla, México.

Modelo	Expresión matemática	Referencia	ID
Schumacher	$At = k + \alpha e^{-\beta/Dn} + \varepsilon$	Schumacher (1939)	M1
Wykoff	$At = k + e^{\alpha + \frac{\beta}{1+Dn}} + \varepsilon$	Wykoff (1982)	M2
Pettersson	$At = k + \frac{1}{(\alpha + \frac{\beta}{Dn})^3} + \varepsilon$	Pettersson (1955)	M3
Curtis A	$At = k + \alpha \left(\frac{Dn}{1+Dn} \right)^\beta + \varepsilon$	Curtis (1967)	M4
Curtis B	$At = k + \alpha \left(1 + \frac{1}{Dn} \right)^\beta + \varepsilon$	Curtis (1967)	M5
Hossfeld I modificado	$At = k + \frac{Dn^2}{(\alpha + \beta Dn)^2} + \varepsilon$	Hossfeld (1822)	M6
Michaelis-Menten I	$At = k + \frac{Dn}{\alpha + \beta Dn} + \varepsilon$	Michaelis y Menten (1913)	M7
Meyer	$At = k + \alpha (1 - e^{-\beta Dn}) + \varepsilon$	Meyer (1940)	M8
Huang	$At = k + \alpha Dn (e^{-\beta Dn}) + \varepsilon$	Huang <i>et al.</i> (1992)	M9

At = altura total; Dn = diámetro normal, k = valor constante de 1.3 como restricción para estimar una At de 1.3 m cuando el Dn es 0; α y β = parámetros a estimar; e = es la función exponencial; ε = término de error aleatorio; ID = Etiqueta que identifica al modelo.

En una primera fase, los modelos se ajustaron usando la base de datos global mediante el método de mínimos cuadrados ordinarios no lineales (MCO-NL), se utilizó el programa estadístico libre R v4.4.1 (R Core Team 2024) en la plataforma RStudio (R-Studio Team 2024). Durante el proceso de ajuste, con base en Dutcă *et al.* (2022), se realizó la corrección de la heterocedasticidad probando diferentes factores de ponderación que se relacionaron con la varianza del error. Mediante la prueba de t se verificó la significancia de todos los parámetros ($p < 0.05$) de cada modelo. Enseguida, se evaluó la calidad de ajuste y poder predictivo de cada modelo mediante un sistema de calificación referido por Tewari y Singh (2018), para lo cual se utilizaron siete estadísticos de bondad de ajuste: suma de cuadrados del error (SCE), cuadrado medio del error (CME), raíz del cuadrado medio del error (RCME), sesgo (S), coeficiente de determinación ajustado (R^2_{adj}), verosimilitud (logLik) y criterio de información de Akaike (AIC), de este modo cada modelo tuvo una calificación total (CT) y el mejor fue el que obtuvo la menor CT. Además, se realizó un análisis e inspección visual gráfica de las tendencias promedio de crecimiento que describe cada modelo con respecto a la trayectoria observada en el intervalo completo de Dn.

$$SCE = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

$$CME = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n}$$

$$RCME = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n}}$$

$$S = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)}{n}$$

$$R^2_{adj} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2}$$

$$AIC = 2p + n \ln \left(\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n} \right)$$

Donde: $\hat{y}_i$, y_i y $\bar{y}_i$ son los valores estimados, observados y promedios de la altura total (At) respectivamente, n es el número total de observaciones usadas en el ajuste, p es el número de parámetros en cada modelo, ln es el logaritmo natural.

Estrategias de ajuste

En una segunda fase, el mejor modelo seleccionado se ajustó mediante tres estrategias de ajuste: (1) ajuste con el método de MCO-NL por separado para cada base de datos individual de cada especie. (2) Ajuste mediante MCO-NL en combinación con la técnica de variables indicadoras (MCO-NL-VI), se utilizó la base de datos global; con base en Montgomery y Runger (2018) y Seki y Sakici (2022), los parámetros del modelo se expandieron con efecto aditivo, lo que permite que al ejecutar la prueba de adicionalidad, se determine un modelo único, en donde los valores de los parámetros son comunes para todas las especies; en caso contrario, puede obtenerse un modelo ampliado, en donde cada especie requiere valores específicos; la especie que se tomó como base para incluir las variables indicadoras fue *Pinus montezumae* porque el ajuste fue más estable y se logró una

convergencia más rápida. (3) Ajuste bajo el enfoque de modelo de efectos mixtos (MEM) no lineales, se usó la base de datos global para una estimación simultánea de valores de los parámetros fijos y aleatorios del mismo modelo (Hox *et al.* 2018, Mehtätalo y Lappi 2020).

En este estudio, con base en Nigul *et al.* (2021), Gomes (2022) y Bui *et al.* (2023), se consideró a la covariable especie como el factor de agrupación con cinco niveles que corresponden a las especies estudiadas, con base en Bronisz y Mehtätalo (2020), Cui *et al.* (2022) y Patricio *et al.* (2022), los efectos aleatorios se incluyeron en ambos parámetros del modelo. Así, se generan valores de los coeficientes aleatorios que son diferentes entre especies porque toman en cuenta la variación del patrón de crecimiento diferenciado entre taxones, son los más importantes y útiles porque predcen la At en forma directa (Nigul *et al.* 2021, Cui *et al.* 2022). En contraste, los parámetros fijos tienen poca utilidad práctica porque modelan la tendencia promedio que corresponde a la base global. En las tres estrategias de ajuste se realizó la corrección de la heterocedasticidad.

Comparación de las estrategias de ajuste

El comparativo entre las tres estrategias de ajuste de acuerdo con Mehtätalo *et al.* (2015) consistió en comparar los valores obtenidos de los estadísticos de bondad de ajuste: R^2_{adj} , RCME, AIC, BIC y logLik. También se efectuó un comparativo y análisis visual gráfico respecto a las tendencias de crecimiento que reproduce cada estrategia para cada una de las especies *versus* las trayectorias observadas en el intervalo completo de diámetro normal registrado, se privilegió la develación de predicciones con curvas biológicamente plausibles y realistas. La corrección de la heterocedasticidad en cada estrategia se verificó de acuerdo con Seki y Sakici (2022) mediante inspección gráfica de los residuos estandarizados *vs* predichos del modelo para las cinco especies en conjunto buscando patrones homocedásticos. En esta fase los ajustes se realizaron con el paquete nlme del programa estadístico R, se usó el comando coef() para obtener los coeficientes aleatorios.

RESULTADOS

Los parámetros de los nueve modelos ajustados fueron significativos ($p < 0.05$). Con relación a la calificación total (CT) que obtuvo cada modelo del sistema de calificación implementado, se tiene que, aunque el M9 que corresponde al de Huang presentó la mejor CT de 9, gráficamente se observa que tiende a sobrestimar la altura a etapas tempranas de desarrollo de los árboles; en contraste, el modelo M6 que corresponde al de Hossfeld I modificado tuvo la segunda mejor calificación (CT = 12). Además, gráficamente presenta un comportamiento biológicamente realista en todo el rango de At y de Dn observado, por tal razón se seleccionó para su posterior ajuste por las tres estrategias referidas (MCO-NL, MCO-NL-VI y MEM), el modelo M3 de Pettersson tuvo un comportamiento parecido al M6, sin embargo, su CT fue de 32. Visualmente se observa que el resto de los modelos sobreestima o subestima la altura total en etapas adultas y maduras de los árboles por lo que fueron descartados (Figura 1).

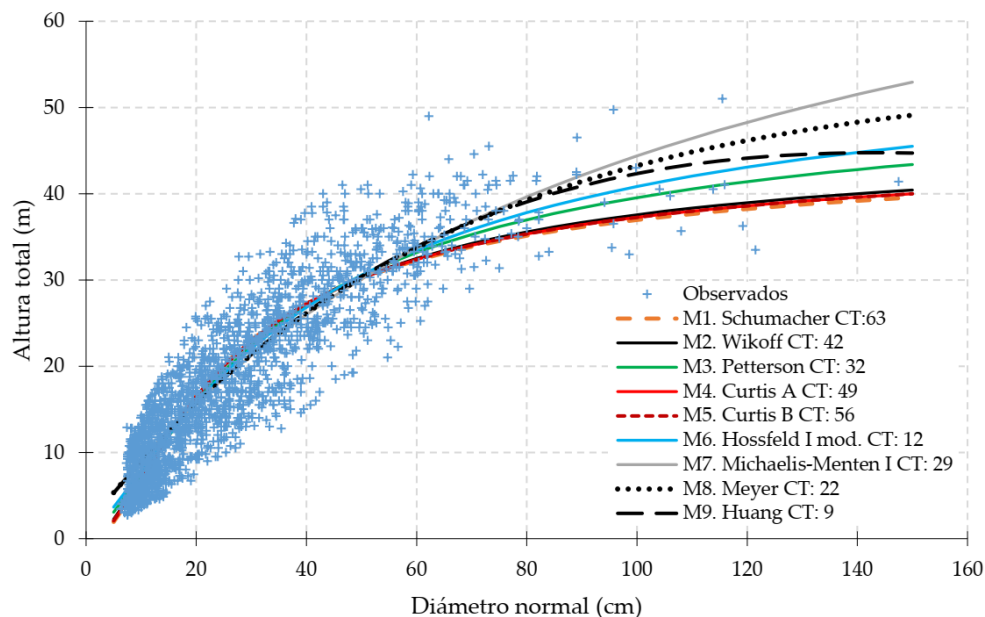


Figura 1. Comportamiento de la tendencia de crecimiento en altura total que describe cada modelo evaluado con respecto al patrón observado con la base de datos global. CT es la calificación total.

En el ajuste del modelo M6 de Hossfeld I modificado mediante las tres estrategias, todos los parámetros fueron significativos ($p < 0.05$). Se determinó que MCO-NL-VI tuvo el mejor valor en el R^2_{adj} con el 85.99%, con MCO-NL solo *Pinus hartwegii* fue mejor (R^2_{adj} de 87.01%); la estrategia de MEM ocupó el segundo lugar para el R^2_{adj} , solo MCO-NL fue mejor en *Pinus hartwegii* y *Pinus montezumae* (R^2_{adj} de 85.98%). Con respecto a la precisión, dada por los valores de la RCME, en las estrategias de MCO-NL-VI y MEM fue de 3.7168 y 3.7576 m, respectivamente, en tanto MCO-NL tuvo mayores valores en *Pinus montezumae*, *Pinus pseudostrobus* y *Abies religiosa* (RCME de 3.9061 a 4.2985 m) (Tabla 3). Al considerar solo al R^2_{adj} y la RCME se infiere que las técnicas de MCO-NL-VI y MEM son mejores que MCO-NL. Al comparar solo a las técnicas de MCO-NL-VI y MEM, se observa que en MEM los valores del AIC, BIC y logLik son mejores. Este análisis comparativo condujo a identificar a la estrategia de MEM como superior.

Para la estrategia de MCO-NL los valores de los parámetros (α y β) para cada especie del modelo seleccionado se obtienen directamente del ajuste, en tanto que, para MCO-NL-VI se obtuvieron del efecto aditivo dado por las variables indicadoras; en este caso, todos los parámetros con ese efecto fueron altamente significativos, por lo que cada taxón requiere tener valores específicos. Por su parte, para MEM los valores de los parámetros α y β correspondieron a los coeficientes de los efectos aleatorios implicados en los niveles del factor de agrupación, que precisamente corresponden a las cinco especies analizadas (Tabla 4). Los valores de cada parámetro en cada especie son próximos entre sí, sobre todo para MCO-NL y MCO-NL-VI. Esta similitud puede constatare gráficamente al observar la tendencia que describe el modelo M6 para cada una de las cinco especies analizadas (Figura 2a-e), en el caso de MEM las estimaciones del modelo son ligera y comparativamente más conservadoras cuando el diámetro normal es mayor a 40 cm en *Pinus pseudostrobus*, *Abies religiosa* y *Cupressus lindleyi*.

Tabla 3. Valores de los estadísticos de bondad de ajuste para el modelo de Hossfeld I modificado para cada estrategia de ajuste utilizada.

Estrategia	Especie	n	R ² _{adj}	RCME	AIC	BIC	logLik
MCO-NL	<i>Pinus hartwegii</i>	479	0.8701	2.7808	2 268.43	2 280.95	-1 131.22
	<i>Pinus montezumae</i>	483	0.8598	3.9428	2 676.88	2 689.42	-1 335.44
	<i>Pinus pseudostrobus</i>	284	0.7127	4.2985	1 634.32	1 645.26	-814.16
	<i>Abies religiosa</i>	625	0.8400	3.9061	3 387.76	3 401.08	-1 690.88
	<i>Cupressus lindleyi</i>	84	0.8502	3.4707	455.35	462.64	-224.67
MCO-NL-VI	Todas	1955	0.8599	3.7168	10 478.94	10 540.30	-5 228.47
MEM	Todas	1955	0.8568	3.7576	10 442.20	10 481.24	-5 214.10

MCO-NL = mínimos cuadrados ordinarios no lineales; MCO-NL-VI = MCO-NL con variables indicadoras; MEM = modelo de efectos mixtos; n = número de observaciones; R²_{adj} = coeficiente de determinación ajustado, RCME = raíz del cuadrado medio del error; AIC = criterio de información de Akaike; BIC = criterio de información Bayesiano; logLik = verosimilitud.

Tabla 4. Valores que toman los parámetros del modelo de Hossfeld I modificado por especie para cada estrategia de ajuste evaluada.

Especie	Parámetro*	Estrategia de ajuste		
		MCO-NL	MCO-NL-VI	MEM
<i>Pinus hartwegii</i>	α	3.024519	3.024521	3.032161
	β	0.140121	0.140121	0.139161
<i>Pinus montezumae</i>	α	3.253269	3.253263	3.313713
	β	0.116104	0.116104	0.114530
<i>Pinus pseudostrobus</i>	α	2.293970	2.293967	2.177761
	β	0.138948	0.138947	0.142549
<i>Abies religiosa</i>	α	1.963992	1.963977	1.843616
	β	0.141980	0.141980	0.146970
<i>Cupressus lindleyi</i>	α	1.739584	1.739578	1.636714
	β	0.155548	0.155548	0.159576

*Todos los parámetros en las tres estrategias de ajuste fueron altamente significativos con valor de $p < 0.0001$ y nivel de significancia $\alpha = 0.05$.

La corrección de la heterocedasticidad fue satisfactoria para las tres estrategias de ajuste como puede confirmarse gráficamente en la Figura 3, al confrontar los residuales estandarizados *vs* los predichos se observa un patrón de distribución aleatorio. En el caso de MCO-NL y MCO-NL-VI el factor de ponderación fue el inverso del diámetro normal, en tanto que para MEM se aplicó el comando de la función potencia (varPower) disponible en el paquete nlme del programa R.

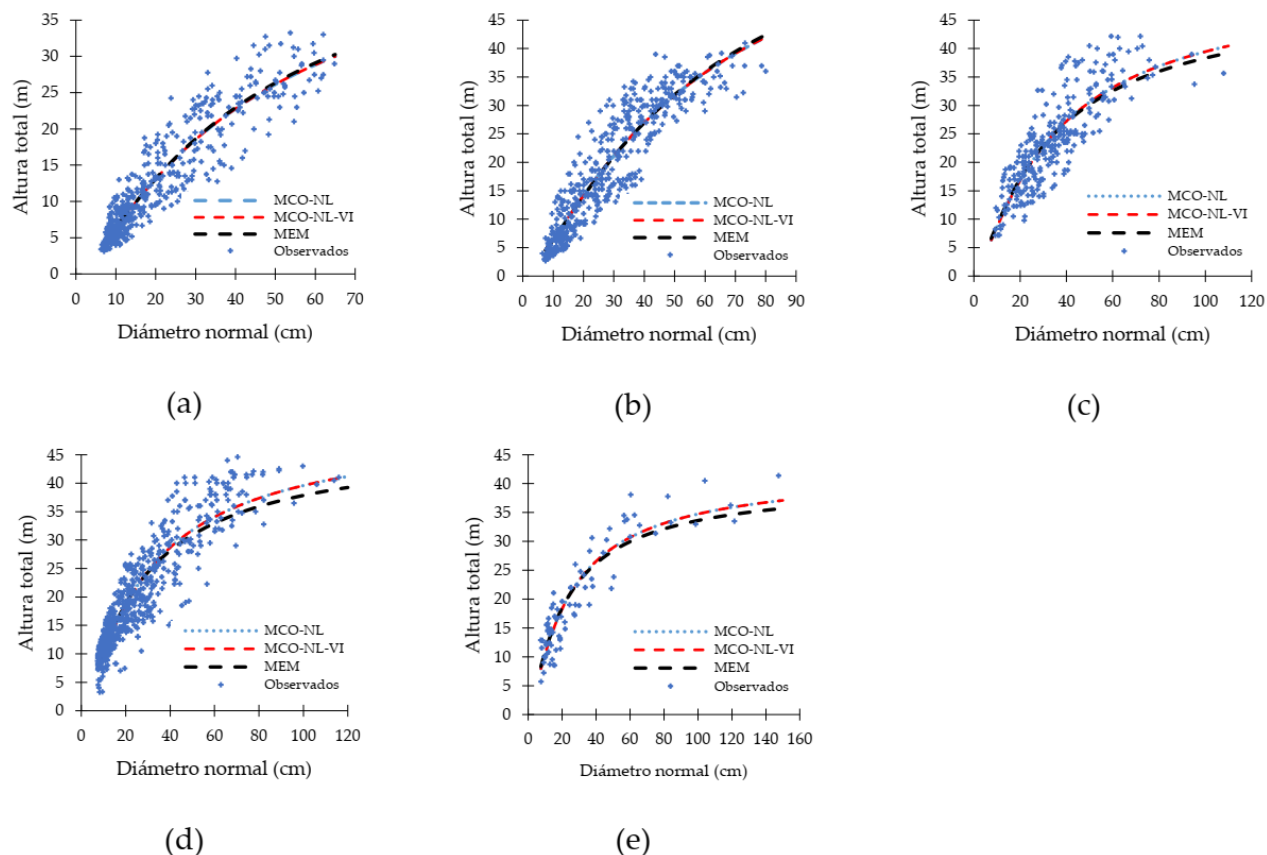


Figura 2. Comparativo gráfico de las tendencias de crecimiento en altura por especie que describe el modelo de Hossfeld I modificado para las tres estrategias de ajuste evaluadas. (a) *Pinus hartwegii*, (b) *Pinus montezumae*, (c) *Pinus pseudostrobus*, (d) *Abies religiosa* y (e) *Cupressus lindleyi*.

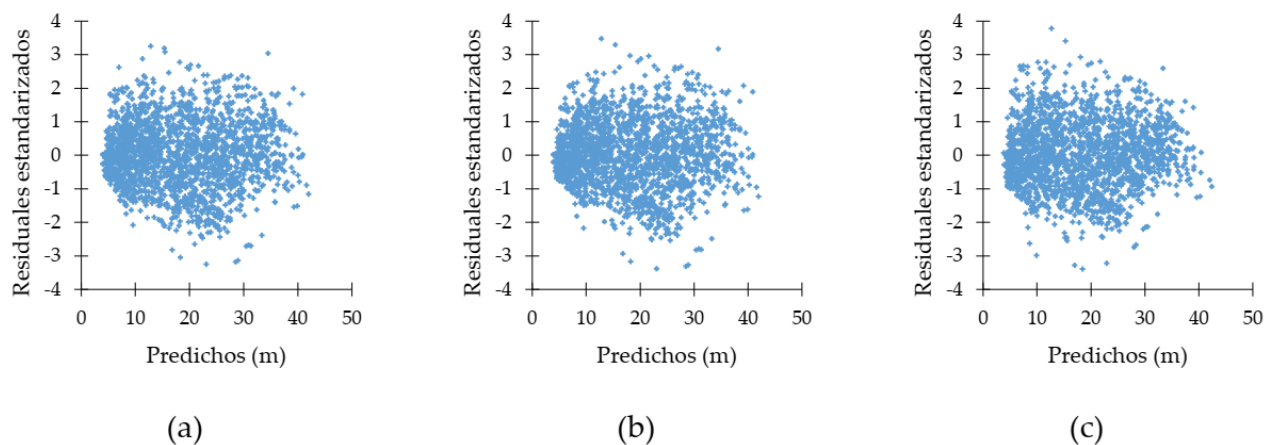


Figura 3. Comportamiento gráfico de los valores de los residuales estandarizados frente a los valores predichos para cada estrategia de ajuste. (a) MCO-NL, (b) MCO-NL-VI y, (c) MEM.

DISCUSIÓN

El análisis cuantitativo y gráfico de nueve modelos alométricos y de crecimiento develó que el modelo M6 que corresponde a la ecuación de Hossfeld I modificado presentó la mejor calidad de ajuste y capacidad predictiva para estimar la altura total en función del diámetro normal en cinco especies de coníferas de la Umafor 2101 al suroeste de Puebla, México. En coincidencia con Nigul *et al.* (2021), este modelo gráficamente exhibió la mejor representación del crecimiento biológico promedio en altura acorde a la tendencia de crecimiento observada; además, demostró ser suficientemente flexible para modelar la relación $At - Dn$ de los datos analizados.

El modelo de Hossfeld I modificado (Hossfeld 1822) pertenece a la familia de modelos de crecimiento clásicos en la modelación forestal, también es reportado en la literatura especializada sobre alometría forestal como modelo de Näslund (Näslund, 1936), son idénticos en su estructura matemática cuando el exponente se reporta con valor de 2, aunque también se ha usado con valor de 3 para generar modelos $At - Dn$. Mehtätalo *et al.* (2015) lo identificaron como apropiado (con exponente de 2 y RCME de 0.82 a 2.81 m) al aplicar la técnica de MEM en 28 conjuntos de observaciones $At - Dn$ en diferentes regiones de Europa, Asia, América del Norte y Sudamérica. Lebedev y Kuzmichev (2020) también determinaron que este modelo mostró la mejor calidad de ajuste (con exponente de 2 y RCME de 1.078 m) para una ecuación local de *Betula* spp. en Rusia. Estas evidencias ratifican que el modelo de Hossfeld I modificado es flexible, parsimonioso y robusto para modelar el crecimiento en la At de diferentes especies en ecorregiones diversas del mundo. Posee excelentes propiedades matemáticas propias de un modelo de crecimiento, tal como forma sigmoidea con asíntota superior, así como un punto de inflexión que determina la tasa de crecimiento máxima, por lo que las predicciones que realiza son biológicamente realistas.

La superioridad de la técnica de MEM, de acuerdo con Zang *et al.* (2016) y Uzoh (2017), se puede explicar porque al utilizar a la especie como factor de agrupación, los efectos aleatorios detectan las diferencias de las propiedades biológicas entre los taxones, así como la variación de los procesos ecológicos particulares que rigen la relación $At - Dn$, lo cual se refleja en la altura máxima que puede alcanzar cada especie. Temesgen *et al.* (2008) también determinaron que MEM fue mejor que MCO-NL al usar como criterio de comparación a la RCME, que fue de 3.76 m y 3.25 m, respectivamente al desarrollar ecuaciones generalizadas $At - Dn$ para *Pseudotsuga menziesii* (Mirb.) Franco en Oregon, EE. UU. Crecente-Campo *et al.* (2010) y Lin *et al.* (2022) identificaron la superioridad de MEM sobre MCO-NL al desarrollar ecuaciones $At - Dn$ para *Eucalyptus globulus* Labill en España y para *Pinus sylvestris* L. en China, respectivamente.

Respecto al uso directo de los valores de los coeficientes que corresponden a los efectos aleatorios al aplicar el enfoque de MEM para estimar la At , que de forma explícita corresponden a los valores de los parámetros α y β del modelo final ajustado, existe experiencia en otros países que confirma y ratifica su uso. Por ejemplo, Nigul *et al.* (2021) aplican MEM y señalan que, para propósitos de aplicación práctica, es posible realizar predicciones de At inmediatas, sin efectuar la calibración, consideran suficiente usar los valores de los parámetros aleatorios de manera directa. Este aspecto es relevante en el uso operativo de modelos $At - Dn$ por los silvicultores, porque para realizar inventarios maderables, el interés principal al coleccionar la información dasométrica en sitios de muestreo, es optimizar los recursos financieros limitados y el tiempo, por lo que sería impráctico

acopiar información adicional para efectuar a posteriori la calibración con esa información extra y utilizando la información de los componentes de varianza de los parámetros aleatorios.

En el mismo sentido referido, Paulo *et al.* (2011) y Zang *et al.* (2016) establecen que, ante la imposibilidad de realizar la calibración de un MEM, es preferible utilizar en forma directa los valores de los parámetros con efecto aleatorio obtenidos en el ajuste del MEM. Fu *et al.* (2017) y MacPhee *et al.* (2018), afirman que esos parámetros describen la condición y tendencia promedio para cada nivel del factor de agrupación. Crecente-Campo *et al.* (2014) y Cui *et al.* (2022) agregan que los MEM logran explicar satisfactoriamente la variación estocástica existente entre diferentes especies al develarse sus características particulares de crecimiento, quedando así definidos modelos específicos por taxón. Este aspecto es reforzado por Rijal *et al.* (2012) y Lam *et al.* (2017), quienes usan MEM y a la especie como factor de agrupación en la generación de modelos At - Dn, determinan que los parámetros con efectos aleatorios son más eficientes en las predicciones que cuando el modelo se ajusta por separado para cada taxón con MCO-NL y con MCO-NL-VI. Con base en lo discutido, se recomienda utilizar los valores de los coeficientes obtenidos para los efectos aleatorios por especie del modelo de Hossfeld I modificado, con lo que se generan las ecuaciones locales At - Dn de los cinco taxones de coníferas en la Umafor 2101.

Las ecuaciones locales At - Dn generadas son el primer conjunto de herramientas biométricas cuantitativas de su tipo, el rango de aplicación se circunscribe a la Umafor 2101, así como a las condiciones de manejo prevalecientes y a las etapas de crecimiento de los árboles para cada especie analizada. Desde el punto de vista de aplicación práctica, estos modelos son fáciles de implementar, su principal utilidad será en la realización de inventarios maderables operativos, así como en la aplicación de prácticas de manejo silvícola. En el futuro, para esta misma región ecológica se deberán de desarrollar ecuaciones generalizadas At - Dn, en las que además del diámetro como variable predictora, también se incluyen variables del rodal, como es el caso de las generadas por Camacho *et al.* (2022) y Puc-Kauil *et al.* (2024) para coníferas de la zona norte de Puebla.

CONCLUSIONES

Se generaron ecuaciones locales altura total – diámetro normal para *Pinus hartwegii*, *Pinus montezumae*, *Pinus pseudostrobus*, *Abies religiosa* y *Cupressus lindleyi*, especies de coníferas de importancia comercial maderable en la Unidad de Manejo Forestal 2101 de la región Izta-Popo en Puebla, México. El modelo biparamétrico de Hossfeld I modificado presentó la mejor capacidad predictiva. La técnica de modelos de efectos mixtos (MEM) junto con el uso de la especie como covariable y factor de agrupación, fue una estrategia de ajuste estadísticamente superior que la de mínimos cuadrados ordinarios no lineales y que la de mínimos cuadrados ordinarios no lineales con inclusión de variables indicadoras. Los efectos aleatorios de la técnica MEM proporcionan de manera directa valores específicos a los parámetros del modelo para cada taxón, lo que hace posible estimar en forma directa a la altura total. Esta estrategia podrá ser implementada para generar modelos At - Dn de otros taxones en diferentes ecorregiones. La principal utilidad de los modelos desarrollados será en la realización de inventarios forestales maderables de las especies analizadas

en la ecorregión de estudio. La estrategia de MEM con la especie como factor de agrupación se recomienda para modelar otros atributos del árbol y de rodal.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece a las localidades forestales de la Umafor 2101 por que permitieron establecer sitios permanentes de investigación silvícola (SPIS) en sus predios bajo manejo forestal. A la Comisión Nacional Forestal representación Puebla y al Gobierno del Estado de Puebla por financiar el establecimiento de la red de SPIS, de la que se generaron los datos analizados en esta investigación.

CONFLICTO DE INTERÉS

Los autores declaran no tener conflicto de intereses

LITERATURA CITADA

- Abedi R, Abedi T (2020) Some non-linear height-diameter models performance for mixed stand in forests in Northwest Iran. *Journal of Mountain Science* 17(5): 1084-1095. <https://doi.org/10.1007/s11629-019-5870-4>
- Bronisz K, Mehtätalo L (2020) Mixed-effects generalized height–diameter model for young silver birch stands on post-agricultural lands. *Forest Ecology and Management* 460: 117901. <https://doi.org/10.1016/j.foreco.2020.117901>
- Bui MH, Nguyen TBP, Dell B (2023) Allometric relationships among tree-size variables under tropical forest stages in Gia Lai, Vietnam. *Ecological Questions* 34(2): 1-25. <https://doi.org/10.12775/EQ.2023.017>
- Camacho EAR, Rivas SC, Hernández JAL, Durán AAC, Carmona JX, Nagel J (2022) Generalized height-diameter models with random effects for natural forests of central Mexico. *CERNE*, 28: e103033. <https://doi.org/10.1590/01047760202228013033>
- Chenge IB (2021) Height–diameter relationship of trees in Omo strict nature forest reserve, Nigeria. *Trees, Forests and People* 3: 100051. <https://doi.org/10.1016/j.tfp.2020.100051>
- Ciceu A, Garcia-Duro J, Seceleanu I, Badea O (2020) A generalized nonlinear mixed-effects height–diameter model for Norway spruce in mixed-uneven aged stands. *Forest Ecology and Management* 477: 118507. <https://doi.org/10.1016/j.foreco.2020.118507>
- CONAFOR (2015) Estudio de cuenca de abasto región Izta Popo. Comisión Nacional Forestal. Guadalajara, Jal., México. 216p. <http://www.conafor.gob.mx:8080/documentos/docs/22/7394Izta-Popo%20%20Puebla%20y%20Taxcala.pdf>. Fecha de consulta 15 de abril de 2025.
- CONAFOR (2016) Estudio de cuenca de abasto forestal “Izta-Popo”. Guadalajara, Jal., México. 213 p. https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/254065/Estudio_de_cuenca_de_abasto_-_Izta-Popo_1_Estado_de_Mexico.pdf. Fecha de consulta 19 de mayo de 2025.
- Corral RS, Silva AMA, Quiñonez BG (2019) A generalized nonlinear height-diameter model with mixed-effects for seven pinus species in Durango, Mexico. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales* 10(53): 86-117. <https://doi.org/10.29298/rmcf.v10i53.500>

- Crecente-Campo F, Corral-Rivas JJ, Vargas-Larreta B, Wehenkel C (2014) Can random components explain differences in the height–diameter relationship in mixed uneven-aged stands?. *Annals of Forest Science* 71: 51-70. <https://doi.org/10.1007/s13595-013-0332-6>
- Crecente-Campo F, Tomé M, Soares P, Diéguez-Aranda U (2010) A generalized nonlinear mixed-effects height–diameter model for *Eucalyptus globulus* L. in northwestern Spain. *Forest Ecology and Management* 259(5): 943-952. <https://doi.org/10.1016/j.foreco.2009.11.036>
- Cui K, Wu X, Zhang C, Zhao X, Von Gadow K (2022) Estimating height-diameter relations for structure groups in the natural forests of Northeastern China. *Forest Ecology and Management* 519: 120298. <https://doi.org/10.1016/j.foreco.2022.120298>
- Curtis RO (1967) Height-diameter and height-diameter-age equations for second-growth Douglas-fir. *Forest Science* 13(4): 365-375. <https://doi.org/10.1093/forestscience/13.4.365>
- Cysneiros VC, Pelissari AL, Gaui TD, Fiorentin LD, Carvalho DCD, Filho STB, Machado SDA (2020) Modeling of tree height–diameter relationships in the Atlantic Forest: effect of forest type on tree allometry. *Canadian Journal of Forest Research* 50(12): 1289-1298. <https://doi.org/10.1139/cjfr-2020-0060>
- Duan G, Gao Z, Wang Q, Fu L (2018) Comparison of different height–diameter modelling techniques for prediction of site productivity in natural uneven-aged pure stands. *Forests* 9(2): 63. <https://doi.org/10.3390/f9020063>
- Dutcă I, McRoberts RE, Næsset E, Blujdea VNB (2022) Accommodating heteroscedasticity in allometric biomass models. *Forest Ecology and Management* 505: 119865. <https://doi.org/10.1016/j.foreco.2021.119865>
- Ferraz-Filho AC, Mola-Yudego B, Ribeiro A, Scolforo JRS, Loos RA, Scolforo HF (2018) Height-diameter models for *Eucalyptus* sp. plantations in Brazil. *CERNE* 24: 9-17. <https://doi.org/10.1590/01047760201824012466>
- Fu L, Sun W, Wang G (2017) A climate-sensitive aboveground biomass model for three larch species in northeastern and northern China. *Trees* 31: 557-573. <https://doi.org/10.1007/s00468-016-1490-6>
- Gollob C, Ritter T, Vospernik S, Wassermann C, Nothdurft A (2018) A flexible height–diameter model for tree height imputation on forest inventory sample plots using repeated measures from the past. *Forests* 9(6): 368. <https://doi.org/10.3390/f9060368>
- Gomes DG (2022) Should I use fixed effects or random effects when I have fewer than five levels of a grouping factor in a mixed-effects model?. *PeerJ*, 10: e12794. <https://doi.org/10.7717/peerj.12794>
- Han Y, Lei Z, Ciceu A, Zhou Y, Zhou F, Yu D (2021) Determining an accurate and cost-effective individual height-diameter model for Mongolian pine on sandy land. *Forests* 12(9): 1144. <https://doi.org/10.3390/f12091144>
- Harrison XA, Donaldson L, Correa-Cano ME, Evans J, Fisher DN, Goodwin CED, Robinson BS, Hodgson DJ, Inger R (2018) A brief introduction to mixed effects modelling and multi-model inference in ecology. *PeerJ* 6: e4794. <https://doi.org/10.7717/peerj.4794>
- Hobiger J, Laa U, Vospernik S (2025) Comparing traditional methods and modern statistical techniques for tree height prediction. *Forests* 16(2): 271. <https://doi.org/10.3390/f16020271>
- Hofiço NDSA, Costa EA, Fleig FD, Finger CAG, Hess AF (2020) Height-diameter relationships for *Eucalyptus grandis* Hill ex. Maiden in Mozambique: using mixed-effects modeling approach. *CERNE* 26(2): 183-192. <https://doi.org/10.1590/01047760202026022677>
- Hossfeld JW (1822) *Mathematik für Forstmänner, Ökonomen und Cameralisten*. Gotha, T4. Bd., S. 310
- Hox J, Moerbeek M, Van de Schoot R (2018) *Multilevel analysis: Techniques and applications*. 3rd Edition. Taylor & Francis Group. New York, USA. 364p. <https://doi.org/10.4324/9781315650982>
- Huang S, Titus SJ, Wiens DP (1992) Comparison of nonlinear height–diameter functions for major Alberta tree species. *Canadian Journal of Forest Research* 22(9): 1297-1304. <https://doi.org/10.1139/x92-172>

- Imani G, Boyemba F, Lewis S, Nabahungu NL, Calders K, Zapfack L, Riera B, Balegamire C, Cuni-Sanchez A (2017) Height-diameter allometry and above ground biomass in tropical montane forests: Insights from the Albertine Rift in Africa. *PloS One* 12(6): e0179653. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0179653>
- Ismail MJ, Poudel TR, Ali A, Dong L (2025) Incorporating stand parameters in nonlinear height-diameter mixed-effects model for uneven-aged *Larix gmelinii* forests. *Frontiers in Forests and Global Change* 7: 1491648. <https://doi.org/10.3389/ffgc.2024.1491648>
- Lam TY, Kershaw JJA, Hajar ZSN, Rahman KA, Weiskittel AR, Potts MD (2017) Evaluating and modelling genus and species variation in height-to-diameter relationships for Tropical Hill Forests in Peninsular Malaysia. *Forestry: An International Journal of Forest Research* 90(2): 268-278. <https://doi.org/10.1093/forestry/cpw051>
- Lebedev A, Kuzmichev V (2020) Verification of two-and three-parameter simple height-diameter models for birch in the European part of Russia. *Journal of Forest Science* 66(9): 375-382. <https://doi.org/10.17221/76/2020-JFS>
- Lin F, Xie L, Hao Y, Miao Z, Dong L (2022) Comparison of modeling approaches for the height-diameter relationship: an example with planted mongolian pine (*Pinus sylvestris* var. *mongolica*) trees in northeast China. *Forests* 13(8): 1168. <https://doi.org/10.3390/f13081168>
- MacPhee C, Kershaw JA, Weiskittel AR, Golding J, Lavigne MB (2018) Comparison of approaches for estimating individual tree height-diameter relationships in the Acadian forest region. *Forestry: An International Journal of Forest Research* 91(1): 132-146. <https://doi.org/10.1093/forestry/cpx039>
- Magalhães TM (2017) Site-specific height-diameter and stem volume equations for Lebombo-ironwood. *Annals of Forest Research* 60(2): 297-312. <https://doi.org/10.15287/afr.2017.838>
- Mehtätalo L, De-Miguel S, Gregoire TG (2015) Modeling height-diameter curves for prediction. *Canadian Journal of Forest Research* 45(7): 826-837. <https://doi.org/10.1139/cjfr-2015-0054>
- Mehtätalo L, Lappi J (2020). *Biometry for forestry and environmental data: With examples in R*. 1st Edition. Chapman and Hall/CRC. Boca Raton, FL, USA. 411p. <https://doi.org/10.1201/9780429173462>
- Meyer HA (1940) A Mathematical expression for height curves. *Journal of Forestry* 38: 415-420. <https://www.jstor.org/stable/40082063?origin=crossref>
- Michaelis L, Menten ML (1913) Die kinetik der invertinwirkung. *Biochemical Journal*, 49, 333-369. https://www.chem.uwec.edu/Chem352_Resources/pages/readings/media/Michaelis_&_Menton_1913.pdf. Fecha de consulta 21 de marzo de 2025.
- Montgomery DC, Runger GC (2018) *Applied statistics and probability for engineers*. 7th Edition. Wiley. Hoboken, NJ, USA. 479p.
- Näslund M (1936) Skogsförsöksanstaltens gallringsförsök i tallskog. *Meddelanden från Statens skogsförsöksanstalt* 29: 1-169. https://pub.epsilon.slu.se/10159/1/medd_statens_skogsforskningsanst_029_01.pdf. Fecha de consulta 14 de marzo de 2025.
- Nigul K, Padari A, Kiviste A, Noe SM, Korjus H, Laarmann D, Frelich LE, Jõgiste K, Stanturf JA, Paluots T, Põldveer E, Kängsepp V, Jürgenson H, Metslaid M, Kangur A (2021) The possibility of using the Chapman-Richards and Näslund functions to model height-diameter relationships in hemiboreal old-growth forest in Estonia. *Forests* 12(2): 184. <https://doi.org/10.3390/f12020184>
- Ogana FN, Corral-Rivas S, Gorgoso-Varela JJ (2020) Nonlinear mixed-effect height-diameter model for *Pinus pinaster* Ait. and *Pinus radiata* D. Don. *CERNE* 26: 150-161. <https://doi.org/10.1590/01047760202026012695>
- Patrício MS, Dias CR, Nunes L (2022) Mixed-effects generalized height-diameter model: A tool for forestry management of young sweet chestnut stands. *Forest Ecology and Management* 514: 120209. <https://doi.org/10.1016/j.foreco.2022.120209>

- Paulo JA, Tomé J, Tomé M (2011) Nonlinear fixed and random generalized height-diameter models for Portuguese cork oak stands. *Annals of Forest Science* 68(2): 295-309. <https://doi.org/10.1007/s13595-011-0041-y>
- Pettersson H (1955) Barrskogens volymproduktion. Meddelande från Statens Skogsforskningsinstitut 45: 1-391. https://pub.epsilon.slu.se/9982/1/medd_statens_skogsforskningsinst_045_01_a.pdf. Fecha de consulta 24 de marzo de 2025.
- Puc-Kauil R, Nava-Nava A, Paredes-Díaz E, Ruiz-Aquino F, Gerónimo-Torres JDC, Ortiz J (2024) Funciones alométricas de altura total para pinos tropicales en Puebla, México. *Ecosistemas y Recursos Agropecuarios* 11(2): e4118. <https://doi.org/10.19136/era.a11n2.4118>
- R Core Team (2024) R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. <https://www.R-project.org/>. Fecha de consulta: 28 de marzo de 2025
- R-Studio Team. (2024). RStudio: Integrated development for R. RStudio, Inc. Boston, MA USA. <https://www.rstudio.com/> Fecha de consulta: 28 de marzo de 2025
- Rijal B, Weiskittel AR, Kershaw JA (2012) Development of regional height to diameter equations for 15 tree species in the North American Acadian Region. *Forestry: An International Journal of Forest Research* 85(3): 379-390. <https://doi.org/10.1093/forestry/cps036>
- Salas-Eljatib C, Corvalán P, Pino N, Donoso PJ, Soto DP (2019) Modelos de efectos mixtos de altura-diámetro para *Drimys winteri* en el sur (41-43 °S) de Chile. *Bosque* 40(1): 71-80. <https://doi.org/10.4067/S0717-92002019000100071>
- Schumacher FX (1939) New growth curve and its application to timber-yield studies. *Journal of Forestry* 37: 819-820. <https://www.cabidigitallibrary.org/doi/full/10.5555/19390630002>
- Seki M, Sakici OE (2022) Ecoregion-based height-diameter models for Crimean pine. *Journal of Forest Research* 27(1): 36-44. <https://doi.org/10.1080/13416979.2021.1972511>
- Sharma RP, Breidenbach J (2015) Modeling height-diameter relationships for Norway spruce, Scots pine, and downy birch using Norwegian national forest inventory data. *Forest Science and Technology* 11(1): 44-53. <https://doi.org/10.1080/21580103.2014.957354>
- Song X, Li J, Zeng X (2024) Parameterization of height-diameter and crown radius-diameter relationships across the globe. *Journal of Plant Ecology* 17(2): rtæ005. <https://doi.org/10.1093/jpe/rtæ005>
- Temesgen H, Monleon VJ, Hann DW (2008) Analysis and comparison of nonlinear tree height prediction strategies for Douglas-fir forests. *Canadian Journal of Forest Research* 38(3): 553-565. <https://doi.org/10.1139/x07-104>
- Tewari VP, Singh B (2018) Total wood volume equations for *Tectona grandis* Linn F. stands in Gujarat, India. *Journal of Forest and Environmental Science* 34(4): 313-320. <https://doi.org/10.7747/JFES.2018.34.4.313>
- Uzoh F (2017) Height-diameter model for managed even-aged stands of ponderosa pine for the Western United States using hierarchical nonlinear mixed-effects model. *Australian Journal of Basic and Applied Sciences* 11(14): 69-87. <https://doi.org/10.22587/ajbas.2017.11.14.10>
- Vibrans AC, Moser P, Oliveira LZ, Maçaneiro JPD (2015) Height-diameter models for three subtropical forest types in southern Brazil. *Ciência e Agrotecnologia* 39(3): 205-215. <https://doi.org/10.1590/S1413-70542015000300001>
- West T, Strimbu B (2025). Diameter and height modeling for accurate prediction of tree size in a Douglas-fir rainforest. *Forestry: An International Journal of Forest Research* cpaf010. <https://doi.org/10.1093/forestry/cpaf010>
- Wykoff WR, Crookston NL, Stage AR (1982) User's guide to the stand prognosis model. USDA Forest Service. Ogden, UT, USA. 113p. <https://doi.org/10.2737/INT-GTR-133>

- Xie L, Widagdo FRA, Miao Z, Dong L, Li F (2022) Evaluation of the mixed-effects model and quantile regression approaches for predicting tree height in larch (*Larix olgensis*) plantations in northeastern China. *Canadian Journal of Forest Research* 52(3): 309-319. <https://doi.org/10.1139/cjfr-2021-0184>
- Yang SI, Brandeis TJ, Helmer EH, Oatham MP, Heartsill-Scalley T, Marcano-Vega H (2022) Characterizing height-diameter relationships for Caribbean trees using mixed-effects random forest algorithm. *Forest Ecology and Management* 524: 120507. <https://doi.org/10.1016/j.foreco.2022.120507>
- Zang H, Lei X, Zeng W (2016) Height-diameter equations for larch plantations in northern and northeastern China: a comparison of the mixed-effects, quantile regression and generalized additive models. *Forestry: An International Journal of Forest Research* 89(4): 434-445. <https://doi.org/10.1093/forestry/cpw022>
- Zhang Z, Wang T, Skidmore AK, Cao F, She G, Cao L (2023) An improved area-based approach for estimating plot-level tree DBH from airborne LiDAR data. *Forest Ecosystems* 10: 100089. <https://doi.org/10.1016/j.fecs.2023.100089>